TEKNIK OPTIMISASI

METODE DALAM MENGGAMBARKAN HUBUNGAN EKONOMI

- Hubungan ekonomi dapat digambarkan dalam bentuk persamaan, tabel, atau grafik.
- Bila hubungannya sederhana, tabel dan/atau grafik dapat mencukupi, namun bila hubungannya rumit, menggambarkan dalam bentuk persamaan mungkin diperlukan.

LANJUTAN...

- Sebagai contoh, misalkan hubungan antara penerimaan total (*total revenue–TR*) perusahaan dan kuantitas (*quantity–Q*) barang atau jasa yang dijual perusahaan pada waktu tertentu, misalkan satu tahun, diberikan fungsi :

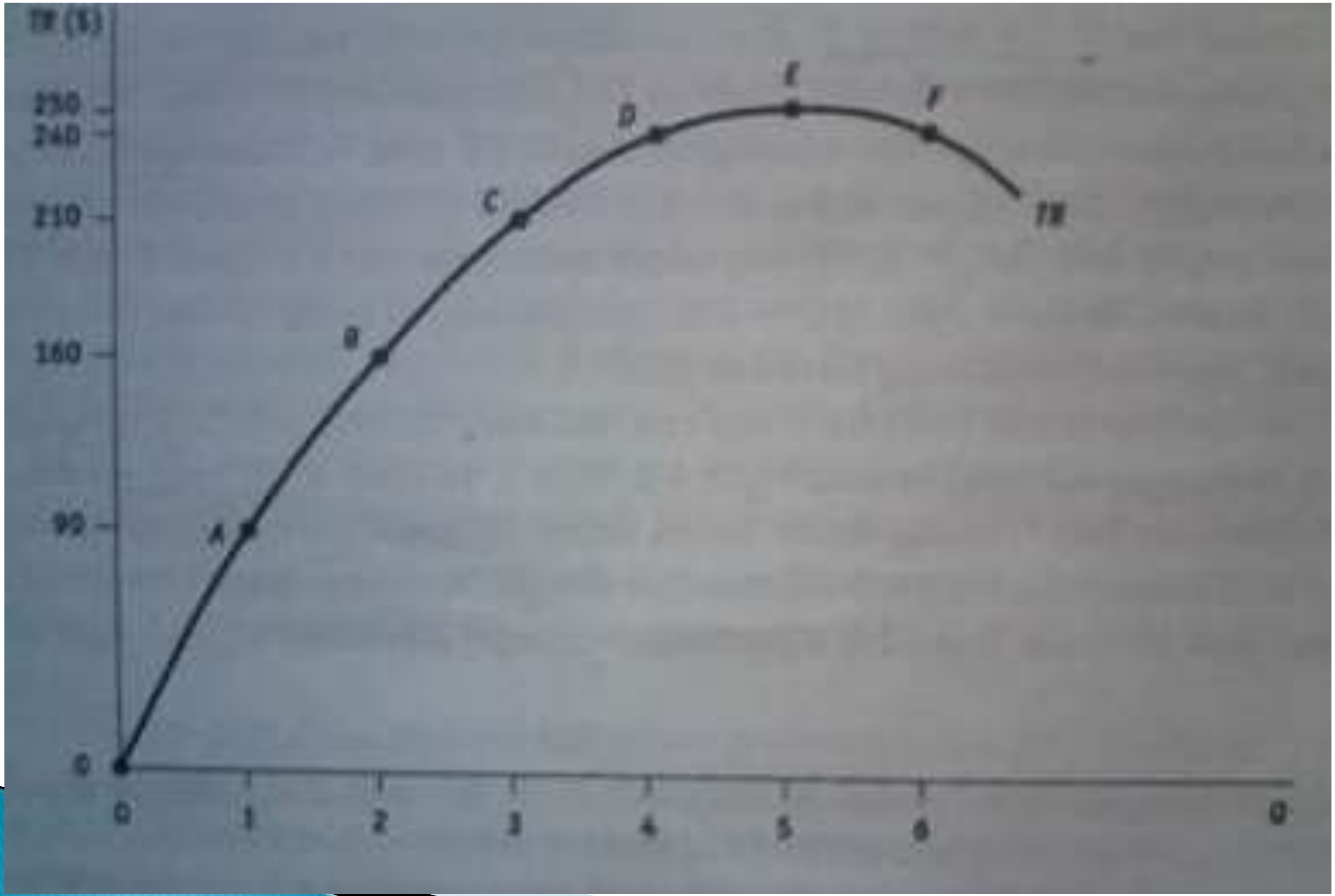
$$TR = 100Q - 10Q^2 \qquad (1\text{–}1)$$

Tabel (1–1)

Q	$100Q - 10Q^2$	TR ($)
0	$100(0) - 10(0)^2$	0
1	$100(1) - 10(1)^2$	90
2	$100(2) - 10(2)^2$	160
3	$100(3) - 10(3)^2$	210
4	$100(4) - 10(4)^2$	240
5	$100(5) - 10(5)^2$	250
6	$100(6) - 10(6)^2$	240

LANJUTAN…

- Kurva penerimaan total perusahaan :



HUBUNGAN BIAYA TOTAL, RATA-RATA DAN MARGINAL

Tabel (1-2) Biaya total, Rata-rata dan Marginal suatu perusahaan

Q	*TC ($)*	*AC ($)*	*MC ($)*
0	20	-	-
1	140	140	120
2	160	80	20
3	180	60	20
4	240	60	60
5	480	96	240

LANJUTAN…

- Pada tabel (1-2) perlu diperhatikan bahwa biaya total (*total cost-TC*) perusahaan adalah \$20 bila output (Q) nol dan meningkat bila output meningkat.

- Biaya rata-rata (*average cost-AC*) sama dengan biaya total dibagi output. Oleh karena itu, $AC=TC/Q$. Jadi, pada $Q=1$, $AC=TC/1=\$140/1=\$140$ dst.

LANJUTAN...

- Harap diperhatikan bahwa mula-mula AC turun kemudian naik. Sedangkan biaya marginal (*marginal cost-MC*) sama dengan perubahan biaya total per unit perubahan output.

- Oleh karena itu, $MC = \Delta TC / \Delta Q$, dimana simbol Δ menunjukkan "perubahan dari", sehingga pada tabel (1-2) setiap kali output meningkat 1 unit, MC diperoleh dengan mengurangi nilai-nilai TC yang berurutan pada kolom kedua dari tabel.

OPTIMISASI DENGAN KALKULUS (Menentukan Maksimum atau Minimum dengan Kalkulus)

- Optimisasi sering diperlukan utk menemukan nilai maksimal atau nilai minimal suatu fungsi.

- Sebagai contoh, suatu perusahaan mungkin ingin memaksimumkan penerimaannya, meminimumkan biaya produksi sejumlah output, atau lebih mungkin memaksimumkan laba.

LANJUTAN…

- Utk suatu fungsi agar mencapai maksimum atau minimum, turunan pertama dr fungsi tsb "harus nol".

- Sebagai contoh, utk fungsi penerimaan total :

$$TR = 100Q - 10Q^2$$

$$\frac{d(TR)}{dQ} = 100 - 20Q$$

Dengan menetapkan $d(TR)/dQ=0$, kita dapatkan :

$$100 - 20Q = 0 \qquad Oleh\ karena\ itu, Q = 5$$

Membedakan antara Maksimum & Minimum

- Utk membedakan antara titik maksimum dan minimum, kita gunakan "turunan kedua"

- Utk fungsi umum Y= f(X), turunan kedua ditulis sebagai d^2Y/dX^2. Turunan kedua adalah turunan dari turunan dan diperoleh dg menerapkan kembali aturan turunan (pertama) dari diferensiasi

- Sebagai contoh : $Y = X^3$

$$\frac{dY}{dX} = 3X^2$$

Dan $$\frac{d^2Y}{dX^2} = 6X$$

LANJUTAN…

- Dengan cara yg sama, utk TR = $100Q - 10Q^2$

$$\frac{d(TR)}{dQ} = 100 - 20Q$$

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2} = -20$$

- Nilai dari turunan kedua dapat digunakan utk menentukan apakah kita mempunyai maksimum atau minimum pada titik dimana turunan pertamanya adalah nol.

- Aturannya adalah bila turunan kedua positif, kita mempunyai minimum, dan jika turunan kedua negatif, kita mempunyai maksimum.

LANJUTAN...

- Beberapa penerapannya sbb, pertama terdapat fungsi penerimaan total : $TR = 45Q - 0{,}5Q^2$

$$\frac{d(TR)}{dQ} = 45 - Q$$

- Dengan menetapkan turunan pertama sama dg nol, kita menemukan bahwa fungsi TR mempunyai nilai Q=45. Karena $d^2(TR)/dQ^2 = -1$, fungsi TR ini mencapai maksimum pada Q=45.

- Contoh lain, dg melihat fungsi biaya marginal :

$$MC = 3Q^2 - 16Q + 57$$

$$Maka, \frac{d(MC)}{dQ} = 6Q - 16$$

LANJUTAN…

- Dengan menetapkan turunan pertama sama dg nol, kita menemukan bahwa fungsi MC memp. nilai $Q = 2\frac{2}{3}$. Karena $d^2(MC)/dQ^2 = 6$, fungsi MC ini mencapai minimum pada saat $Q = 2\frac{2}{3}$
- Terakhir, contoh yang lebih komprehensif dan penting diberikan oleh maksimasi laba perusahaan. Misalkan fungsi penerimaan total dan biaya total perusahaan berturut-turut adalah :

$$TR = 45Q - 0{,}5Q^2 \qquad TC = Q^3 - 8Q^2 + 57Q + 2$$

LANJUTAN…

- Maka, $\pi = TR - TC$

$$
\begin{aligned}
&= 45Q - 0{,}5Q^2 - (Q^3 - 8Q^2 + 57Q + 2) \\
&= 45Q - 0{,}5Q^2 - Q^3 + 8Q^2 - 57Q - 2 \\
&= -Q^3 + 7{,}5Q^2 - 12Q - 2
\end{aligned}
$$

- Untuk menentukan tingkat keluaran dimana perusahaan memaksimumkan π, dilanjutkan sbg berikut :

$$
\begin{aligned}
\frac{d\pi}{dQ} &= -3Q^2 + 15Q - 12 = 0 \\
&= (-3Q + 3)(Q - 4) = 0
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, Q=1 dan Q=4

LANJUTAN…

- Turunan keduanya adalah : $\dfrac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 15$

- Pada Q=1, ($d^2\pi/dQ^2$)= –6(1)+15 = 9 (min.)
- Pada Q=4, ($d^2\pi/dQ^2$)= –6(4)+15 = –9 (maks.)

- Oleh karena itu, π maksimum adalah pada Q=4, dan kita dpt menentukan bahwa :

$$\pi = -(4^3) + 7{,}5(4)^2 - 12(4) - 2$$

$$= -64 + 120 - 48 - 2$$

$$= \$6$$

OPTIMISASI MULTIVARIAT

- Optimisasi multivariat adalah proses menentukan titik maksimum atau minimum suatu fungsi yang mempunyai lebih dari dua variabel.

- Dampak marginal pada variabel terikat, misal laba total yang diakibatkan karena perubahan kuantitas setiap variabel scr individu seperti jml komoditas X dan Y yang dijual, dianalisis scr terpisah menggunakan "turunan parsial".

- Turunan parsial ditunjukkan dengan simbol ∂

LANJUTAN…

- Sebagai contoh, misalkan bahwa fungsi laba total (π) suatu perusahaan tergantung kepada penjualan komoditas X dan Y sbb :

$$\pi = f(X,Y) = 80X - 2X^2 - XY - 3Y^2 + 100Y$$

- Utk mencari turunan parsial dari π terhadap X, ∂π/∂X adalah : $\frac{\partial \pi}{\partial X} = 80 - 4X - Y$

- Dengan cara yg sama, turunan parsial dari π terhadap Y, ∂π/∂Y adalah : $\frac{\partial \pi}{\partial Y} = -X - 6Y + 100$

LANJUTAN…

- Utk memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi dg banyak variabel , kita harus membuat setiap turunan parsial sama dengan nol dan memecahkan beberapa persamaan tsb secara bersamaan utk memperoleh nilai optimum dari variabel bebas atau variabel di sisi sebelah kanan.

- Kita menetapkan $\partial\pi/\partial X$ dan $\partial\pi/\partial Y$ (diperoleh sebelumnya) sama dg nol dan mencari nilai X dan Y.

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = 80 - 4X - Y = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Y} = -X - 6Y + 100 = 0$$

LANJUTAN…

- Kalikan persamaan pertama di atas dengan −6, atur kembali persamaan kedua dan kemudian jumlahkan kedua persamaan tsb, kita dapatkan :

$$
\begin{array}{r}
-480+24X+6Y=0 \\
100-X-6Y=0 \\
\hline
-380+23X=0
\end{array}
$$

- Sehingga, X = 380/23 = 16,52

- Substitusikan X = 16,52 ke dalam persamaan pertama dari turunan parsial yg ditetapkan sama dg nol, dan cari nilai Y, kita dapatkan :

$$80-4(16{,}52)-Y=0$$

LANJUTAN…

- Maka, $Y = 80 - 66{,}08 = 13{,}92$
- Jadi, perusahaan memaksimumkan π pada saat menjual 16,52 unit komoditas X dan 13,92 unit komoditas Y. Substitusikan nilai-nilai ke dalam fungsi π, kita memperoleh laba total maksimum perusahaan sebesar :

$$\pi = 80(16{,}52) - 2(16{,}52)^2 - (16{,}52)(13{,}92) - 3(13{,}92)^2 + 100(13{,}92)$$

$$= \$1.356{,}52$$

ANALISIS MARJINAL (contoh)

- Diketahui,

$T\pi = -\$10{,}000 + \$\ 400\ Q - \$\ 2\ Q^2$

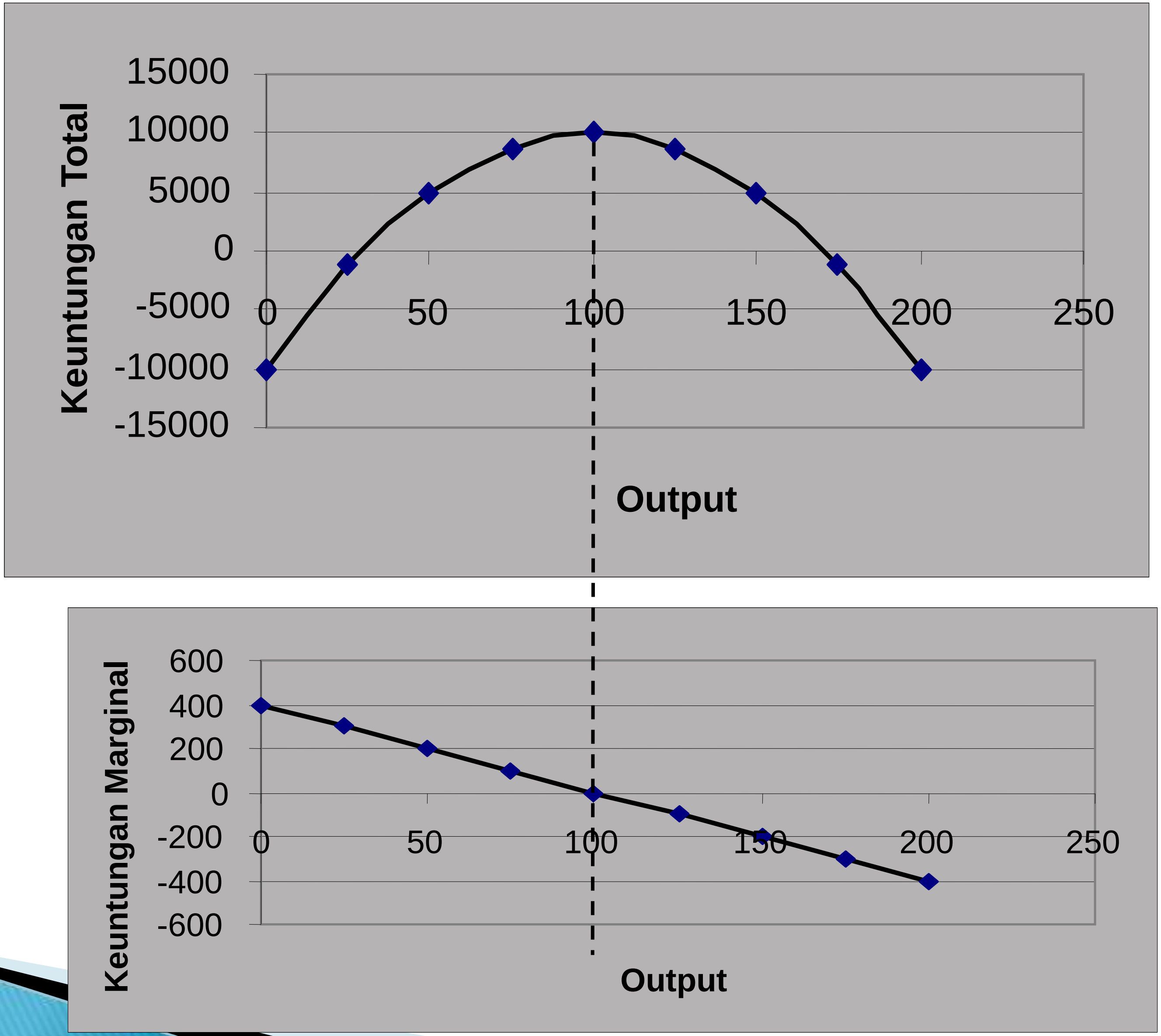
$M\pi = 400 - 4\ Q$

Q	Keuntungan Total	Keuntungan Marginal
0	-10000	**400**
25	-1250	**300**
50	5000	**200**
75	8750	**100**
100	10000	**0**
125	8750	**-100**
150	5000	**-200**
175	-1250	**-300**
200	**-10000**	**-400**

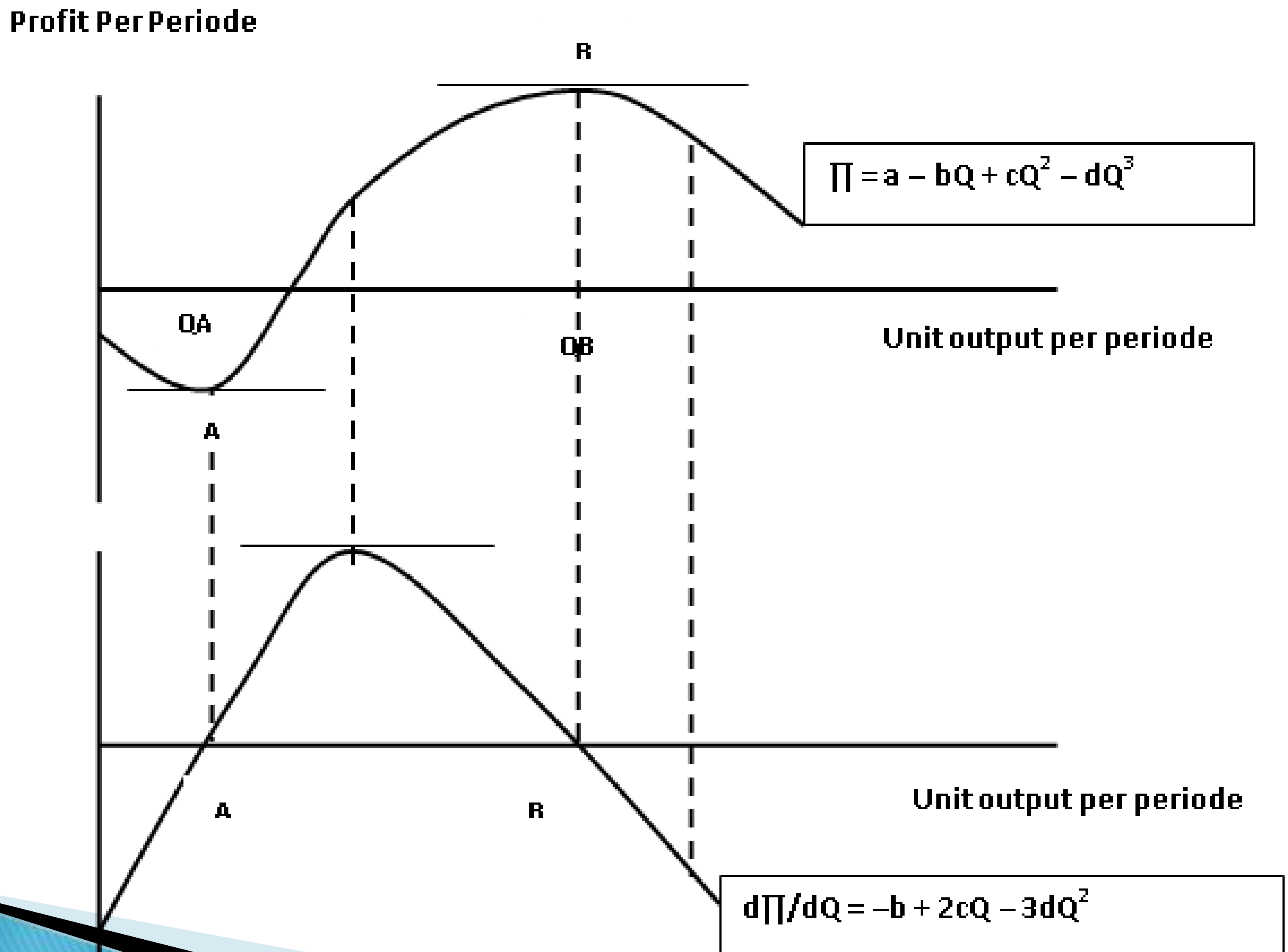
ANALISIS MARJINAL

- Analisis pada fungsi marjinal sering digunakan untuk membuat keputusan ekonomi.
- Turunan pertama fungsi "total" akan menunjukkan fungsi "marjinal"-nya.
- Oleh karena turunan pertama dari sebuah fungsi menunjukkan nilai maksimum/minimum, maka fungsi "marjinal" dapat digunakan untuk melihat nilai maksimum/minimum dari fungsi "total"-nya.

ANALISIS MARJINAL (contoh)



ANALISIS MARJINAL (contoh)



Coba kerjakan

- Sebuah perusahaan makanan ringan memiliki fungsi total profit seperti dibawah, dengan batasan produksi X+Y=12. Berapa kombinasi produksi X dan Y agar profit maksimum ? Berapa profit maksimum ?

$$\pi = f(X,Y) = 80X - 2X^2 - XY - 3Y^2 + 100Y$$

- Untuk memaksimumkan profit, sebuah kafe mengikuti fungsi $T_{\Pi} = -3.000 - 2.400\ Q + 350\ Q^2 - 8{,}333\ Q^3$. Tentukan fungsi M_{Π}, titik profit maksimum dan minimum, jumlah profit maksimum dan minimun.

- Diketahui fungsi pendapatan dan fungsi biaya sebuah restoran $TR = 41{,}5Q - 1{,}1Q^2$ dan $TC = 150 + 10Q - 0{,}5Q^2 + 0{,}02Q^3$. Carilah titik dan nilai profit maksimum dan minimum restoran tersebut.

OPTIMISASI TERKENDALA

- Adakalanya seorang manajer menghadapi berbagai kendala dalam mengambil keputusan optimisasi.
- Sebagai contoh, suatu perusahaan dapat menghadapi keterbatasan pada kapasitas produksinya atau pada ketersediaan tenaga ahli atau bahan mentah yang penting.
- Dalam kasus tsb perusahaan mempunyai masalah optimisasi terkendala, yaitu maksimasi atau minimasi fungsi tujuan dengan berbagai kendala.

Optimisasi Terkendala dengan Substitusi

- Masalah optimisasi terkendala dapat dipecahkan mula-mula dg memecahkan *persamaan kendala* utk satu dari beberapa variabel keputusan, lalu mensubstitusikan nilai variabel tsb ke dalam fungsi tujuan yg dicari perusahaan (maksimum atau minimum).

- Sebagai contoh, misal perusahaan berusaha memaksimumkan fungsi laba totalnya :

$$\pi = f(X, Y) = 80X - 2X^2 - XY - 3Y^2 + 100Y$$

- Tetapi menghadapi kendala bahwa output komoditas X ditambah output komoditas Y harus sama dengan 12.

LANJUTAN…

- Jadi, $X + Y = 12$

- Untuk memecahkan masalah ini dg substitusi, kita dapat memecahkan fungsi kendala untuk X, mensubstitusikan nilai X ke dalam fungsi tujuan yang ingin dimaksimumkan. Dengan menyelesaikan fungsi kendala utk X, diperoleh :

$$X = 12 - Y$$

- Substitusikan persamaan tsb ke fungsi tujuan :

$$\begin{aligned}
\pi &= 80(12 - Y) - 2(12 - Y)^2 - (12 - Y)Y - 3Y^2 + 100Y \\
&= 960 - 80Y - 2(144 - 24Y + Y^2) - 12Y + Y^2 - 3Y^2 + 100Y \\
&= 960 - 80Y - 288 + 48Y - 2Y^2 - 12Y + Y^2 - 3Y^2 + 100Y \\
&= -4Y^2 + 56Y + 672
\end{aligned}$$

LANJUTAN…

- Utk memaksimumkan fungsi laba (tanpa kendala) di atas, kita memperoleh turunan pertama π terhadap Y, yg dibuat sama dg nol, dan pecahkan utk memperoleh nilai Y. Jadi, $\frac{d\pi}{dY} = -8Y + 56 = 0$
- Maka, Y=7
- Substitusikan Y=7 ke dalam fungsi kendala, kita memperoleh X=12-Y = 12-7 = 5
- Jadi, perusahaan memaksimumkan laba total bila memproduksi 5 unit komoditas X dan 7 unit komoditas Y.

$$\pi = 80(5) - 2(5)^2 - (5)(7) - 3(7)^2 + 100(7)$$
$$= \$868$$

THANK YOU!